Anwesenheitsübung II [19.04.2011]

Aufgabe 4: Wegabhängige Kraft

Gebenen sei die Kraft

$$\vec{F} = a \cdot \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \\ x \cdot z \end{pmatrix} \tag{1}$$

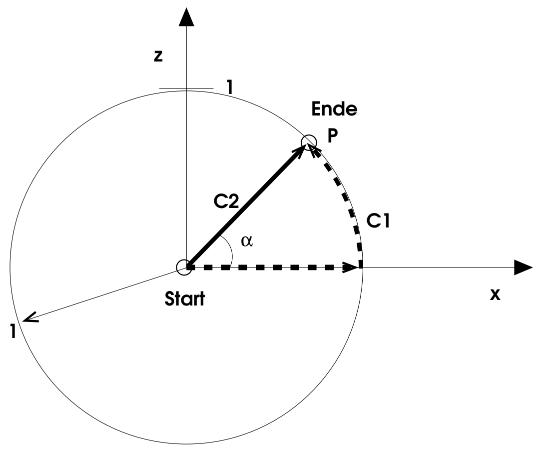
mit $a > 0$ als Konstante und $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Kraft nicht konservativ ist.

(b) Im Folgenden soll die Arbeit bestimmt werden, die auf den Wegen C_1 und C_2 vom Ursprung des Koordinatensystems zum Punkt P geleistet wird (siehe Zeichunung),

$$W = -\int \vec{F}\, d\vec{r}. \tag{2}$$

Der Winkel α zwischen $x-$Achse und dem Vektor vom Ursprung bis zum Punkt P sei $\alpha = 45°$. Folgen Sie folgenden Schritten zur Bestimmung der Arbeit:



(i) Betrachten Sie zuerst den Weg C_1. Teilen Sie ihn in zwei Teilstücke T_1 (Stück entlang der x-Achse) und T_2 (Stück entlang des Kreisradius) ein - die Gesamtarbeit setzt sich dann aus $W_{C_1} = W_{T_1} + W_{T_2}$ zusammen. Parametrisieren Sie den Ortsvektor $\vec{r}$ als Funktion eines Parameters t für das Teilstück T_1 wie folgt:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Substituieren Sie $d\vec{r} = d\vec{r}/dt \cdot dt$ und die Integrationsgrenzen in Gleichung (2), und bestimmen Sie die auf T_1 geleistete Arbeit W_{T_1} für die in Gleichung (1) gegebene Kraft.

(ii) Für das Teilstück T_2 wird genauso verfahren. Die Parametrisierung soll in diesem Fall entlang des Einheitskreises mit $1 = x^2 + z^2$ erfolgen. Hierzu wird $x = t + 1$ gewählt, und für z folgt $z = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - (t+1)^2}$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ 0 \\ \sqrt{1-(t+1)^2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Bestimmen Sie W_{T_2} durch Einsetzen der Parametrisierung in Gleichung (1).

(iii) Geben Sie die insgesamt auf dem Weg C_1 unter der Einwirkung der Kraft $\vec{F}$ geleistete Arbeit W_{C_1} an.

(iv) Bestimmen Sie mit dem gleichen Ansatz wie für C_1 die auf dem Weg C_2 geleistete Arbeit W_{C_2}.

Aufgabe 5: Stokes'sche Reibung

In der Vorlesung wurde der Fall eines Regentropfens mit Anfangshöhe h_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter der Einwirkung der Gravitationskraft und der Newton'schen Reibung beschrieben. In dieser Übungsaufgabe soll das gleiche Problem unter der Einwirkung von Stoke'scher Reibung,

$$\vec{F}_S = \mu \cdot \vec{v} \tag{5}$$

mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v \end{pmatrix}$ untersucht werden.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Fallhöhe $h(t)$ auf.

(b) Bestimmen Sie die konstante Geschwindigkeit v_∞, mit welcher der Tropfen nach bestimmter Zeit fällt.

(c) Zeigen Sie, dass der Ansatz $h_a(t) = \alpha \cdot \exp(\lambda \cdot t)$ die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung darstellt, und bestimmen Sie λ.
Hinweis 1: Als allgemeine Lösung bezeichnet man die Lösung der homogenen Differentialgleichung.
Hinweis 2: Für λ ergeben sich zwei Werte. Die Gesamtlösung ergibt sich aus der Linearkombination der beiden Lösungen, mit Konstanten α_1 und α_2.

(d) Zeigen Sie, dass die spezielle Lösung der Bewegungsgleichung eine lineare Funktion, $h_s(t) = \beta \cdot t + \gamma$ ist, und bestimmen Sie β.

(e) Die Bahnkurve ergibt sich als Linearkombination der allgemeinen und speziellen Lösungen. Schreiben Sie diese auf.

(f) Nehmen Sie nun an, dass der Regentropfen zur Zeit $t = 0$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 und einer Anfangshöhe h_0 losfliegt. Eliminieren Sie die Konstanten α_1, α_2 und γ mit Hilfe der Anfangsbedingungen.

(g) Welche Funktion ergibt sich für die Bahnkurve für $t \to \infty$? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis für die Newton'sche Reibung aus der Vorlesung.
Hinweis: Nähern Sie die Exponentialfunktion.