Übungen zur klassischen Elektrodynamik

WS 2014/2015

9.Übungsblatt: Abgabe bis zum 20.01.2015

Hinweis: Nächste Woche (Mo. 19.01. und Di. 20.01) finden *keine* Übungen statt. Nächste und letzte Übung findet am Mo. 26.01. bzw. am Di. 27.01. statt.

Aufgabe 9.1:

Vgl. Kap. 5.5.1 im Skript Im Falle verschwindender Ströme und Ladungen sind in der Lorenz-Eichung das skalare Potential $\Phi(\vec{r},t)$ und das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$ Lösungen der Gleichung $\Box\Phi = 0$ und $\Box\vec{A} = 0$.

a) Zeigen Sie, dass in deisem Falle auch das elektrische und das magnetische Feld den Gleichungen $\Box\vec{E} = 0$ und $\Box\vec{B} = 0$ genügen. [2P]

b) Wenn die ebenen Wellen $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ (seien $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ konstant) die Gleichungen aus Teil a) lösen, welche Beziehung besteht dann zwischen ω und $\vec{k}$ (Dispersionrelation)? Wie liegen die Vektoren $\vec{k}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zueinander? [2P]

Aufgabe 9.2:

Im Vakuum liege das elektrische Wellenfeld

$$\vec{E} = 2A_0 \cos(kz)(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y)$$

mit der Konstanten A_0 vor, welches die Dispersionsrelation $\omega^2 = k^2c^2$ erfüllt.

a) Schreiben Sie das Feld als Überlagerung ebener Wellen. [2P]

Hinweis: (*vlg. Kap. 6.1.2*) Die allgemeine Darstellung einer in Richtung $\vec{k}$ propagierenden ebene Welle lautet

$$\vec{U}(\vec{r},t) = \vec{U}_1 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) + \vec{U}_2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t).$$

Sie können die ebenen Wellen bestimmen, indem Sie Rechenregeln für trigonometrische Funktionen benutzen oder einfach direkt die trigonometrische Funtionen durch die komplexe Exponentialfunktion darstellen.

b) Bestimmen Sie das zugehörige Magnetfeld. Berechnen Sie dann den Poynting-Vektor und interpretieren Sie das Ergebnis. [2P]

Aufgabe 9.3:

Vgl. Kap. 5.8 im Skript In der Vorlesung wurde ausgehend von der Bewegungsgleichung

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{B}$$

eines nicht-relativistischen Teilchens der Ladung e und Masse m, welches den elektromagnetischen Feldern

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

ausgesetzt ist, die Hamilton-Funktion

$$H(\vec{q},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{q},t)\right)^2 + e\Phi(\vec{q},t)$$

abgeleitet.

a) Schließen Sie nun andersherum mit Hilfe der kanonischen/Hamiltonischen Gleichungen von der Hamilton-Funktion auf die Bewegungsgleichung. [2P]

b) Leiten Sie aus der Hamilton-Funktion $H(\vec{q},\vec{p},t)$ die Lagrange-Funktion $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ durch eine Legendre-Transformation her. [2P]