

# Übungen zur klassischen Elektrodynamik

WS 2014/2015

5. Übungsblatt: Abgabe bis zum 25.11.2014

## Aufgabe 5.1:

Beweisen Sie die folgende Darstellung der Legendrepolynome:

$$P_n(\mu) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^k k! (n-k)! (n-2k)!} \mu^{n-2k},$$

mit der Gaußklammer

$$[n/2] = \begin{cases} n/2, & \text{für } n \text{ gerade} \\ (n-1)/2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenden Sie dazu zweimal den Binomialsatz

$$(x+y)^z = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{z}{k} x^{z-k} y^k,$$

wobei  $z \in \mathbb{R}$  und  $x, y \in \mathbb{C}$ , auf die erzeugende Funktion  $T(\mu, s)$  an und schließen Sie auf die Form der  $P_n$  durch Koeffizientenvergleich mit der definierenden Taylorreihe (Siehe Formel 3.68 im Skript). Die Konvergenz der Summe in der binomischen Formel wird durch  $|y/x| < 1$  sichergestellt. Die Definition des verallgemeinerten binomischen Koeffizienten für reelle  $z$  ist gegeben durch  $\binom{z}{k} = \frac{z(z-1)(z-2)\dots(z-k+1)}{k!}$  für  $k > 0$  und  $\binom{z}{0} = 1$ .

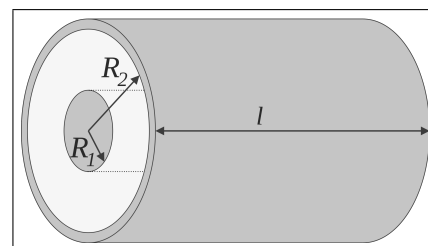
**Hinweis:** Für die Auswertung der Doppelsumme ist folgende Identität hilfreich

[3P]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n f(n, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} f(n-k, k).$$

## Aufgabe 5.2:

Als weiteres Beispiel zur Berechnung von elektrischen Feldern und Potentialen wollen wir den abgebildeten Zylinderkondensator betrachten. Die innere metallische Elektrode mit Radius  $R_1$  trägt die Ladung  $Q$  pro Längenelement  $l$ . Ein dünnes Metallblech mit Radius  $R_2$  umgibt den inneren Zylinder konzentrisch und trägt die Ladung  $-Q$  pro Längenelement  $l$ . Sie können davon ausgehen, dass der Zylinder unendlich lang ist, sodass Randeffekte vernachlässigt werden können.



a) Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte  $\sigma_{R_1}$  und  $\sigma_{R_2}$  auf der Kernelektrode, bzw. auf dem Metallblech. Wie lautet die Ladungsdichte  $\rho(r)$ ? Hier bezeichnet  $r$  die radiale Koordinate in Zylinderkoordinaten. [1P]

b) Berechnen Sie das elektrische Feld  $\vec{E}(r)$  in den Bereichen  $r < R_1$ ,  $R_1 < r < R_2$  und  $r > R_2$  und belegen Sie so die Gültigkeit der Sprungbedingung  $\vec{E}_a - \vec{E}_b = 4\pi\sigma\vec{n}$  an den beiden Grenzflächen. [1P]

⇒ Bitte wenden



Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833) hat sich in einem 1806 publizierten Buch auch mit der Bahnbestimmung von Kometen befasst.

c) Berechnen Sie das Potential  $\Phi(r)$  mit der Bedingung  $\Phi(\infty) = 0$ . [1P]

d) Die Kapazität  $C$  eines Kondensators ist definiert durch  $C = Q/U$ , wobei  $U$  die Spannung zwischen den Kondensatorplatten ist. Berechnen Sie die Kapazität pro Längeneinheit des Kondensators. [1P]

### Aufgabe 5.3:

In dieser Aufgabe werden wir zunächst eine Anwendung der Gleichungen (3.88) bis (3.90) aus dem Skript besprechen und dann zu einer alternativen Darstellung des Quadrupolmoments kommen.

a) Berechnen Sie das Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment eines Kreisrings, dessen Ladungsdichte in Kugelkoordinaten gegeben ist durch

$$\rho(\vec{r}') = \frac{q}{2\pi R^2} \delta(\vec{r}' - \vec{R}) \delta(\mu),$$

wobei  $\mu := \cos \theta$  ist. [2P]

b) Die Gleichung (3.90) aus dem Skript ist besonders dann hilfreich, wenn wie im Beispiel a) eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung vorliegt. Für andere Fälle ist es zweckmäßiger, das Quadrupolmoment mit Hilfe eines Tensors darzustellen:

$$Q_2 = \frac{1}{2r^2} \sum_{ij} x_i x_j Q_{ij},$$

wobei die  $Q_{ij}$  die Komponenten des sogenannten Quadrupoltensors und  $x_i$  und  $x_j$  Komponenten des Vektors  $\vec{r}$  darstellen.

Zeigen Sie unter Verwendung von  $\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos \theta$ , dass aus Gleichung (3.90) im Skript für die Komponenten des Quadrupoltensors

$$Q_{ij} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij})$$

folgt. [2P]