# Übung zur Theoretischen Physik IV

**SS 2014**

Ausgabe: 23. Juni 2014, Abgabe: 7. Juli 2014, 12 h
Besprechung in den Übungsgruppen am 10./11. Juli 2014

6. Übungsblatt

## Aufgabe 21: (5 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe der großkanonischen Gesamtheit $P(T,\mu)$ für ein ideales Fermi- bzw. Bosegas (ohne Berücksichtigung des Spins), dessen Teilchen die Energie-Impuls-Beziehung $\epsilon = pc$ eines extrem relativistischen idealen Gases aufweisen. Dabei seien $c$ eine konstante Geschwindigkeit und der Impuls $p$ kontinuierlich. Man gebe $P(T,\mu)$ als Funktion von $f_n(\alpha)$ bzw. $g_n(\alpha)$ an, wenn $\alpha = \mu/(k_B T)$ und

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &:= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{n-1}}{\mathrm{e}^{x-\alpha}+1}, \qquad -\infty < \alpha < \infty, n > 0 \\ g_n(\alpha) &:= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{n-1}}{\mathrm{e}^{x-\alpha}-1}, \qquad -\infty < \alpha \leq 0, n > 0 \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie die Gültigkeit von $\frac{dg_n}{d\alpha} = g_{n-1}$ für $n > 1$ und

$$g_{3/2}(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dy \frac{y^2}{\mathrm{e}^{y^2-\alpha}-1}$$

## Aufgabe 22: (5 Punkte)

Gegeben sei der Druck $P(T,\mu)$ eines idealen Bosegases mit linearer Energie-Impuls-Beziehung

$$P(T,\mu) = a_1 T^4 g_4(\alpha),$$

wobei $\alpha = \mu/(k_B T) \leq 0$, $a_1 = 8\pi k_B^4/(h^3c^3)$ und

$$g_n(\alpha) := \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{n-1}}{\mathrm{e}^{x-\alpha}-1}$$

mit $\frac{dg_{n+1}(\alpha)}{d\alpha} = g_n(\alpha)$ für $n > 0$. Gesucht sind:

a) $S(T,\mu,V)$
b) $N(T,\mu,V)$
c) $U(T,\mu,V)$; man zeige außerdem, dass $U = 3PV$
d) Wärmekapazität bei konstantem $V$ und $\mu$: $C_{V,\mu}(T,\mu,V)$
e) $P(T,\mu,N)$ für den Grenzfall $\alpha \to -\infty$, woraus $g_n(\alpha) \approx \mathrm{e}^\alpha$ folgt.

## Aufgabe 23: (4 Punkte)

a) Erklären Sie mit eigenen Worten, was eine starke Entartung des idealen Fermigases bedeutet und was man unter dem Fermi-Impuls versteht.

b) In der Vorlesung wurden für Druck und Energie die Ausdrücke

$$\begin{aligned} P &= \frac{gm^4c^5}{48\pi^2\hbar^3}\,f(x), \\ E &= \frac{gm^4c^5}{48\pi^2\hbar^3}\,h(x) \end{aligned}$$

mit $h(x) = 8x^3 \left(\sqrt{1+x^2} - 1\right) - f(x)$ und $f(x) = x(2x^2 - 3)\sqrt{1+x^2} + 3\sinh^{-1}x$ hergeleitet.

Nähern Sie $f(x)$ und $g(x)$ für den nichtrelativistischen Grenzfall ($x \ll 1$) bzw. hochrelativistischen Grenzfall ($x \gg 1$) und geben Sie jeweils zwei führende Terme an. Verwenden Sie dazu die Reihendarstellung

$$\sinh^{-1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{k-1}(0)}{k} x^k,$$

wobei $P_n(x)$ das Legendre-Polynom bezeichnet.

c) Bestimmen Sie die Zustandsgleichung $P(E)$ für die nichtrelativistische und hochrelativistische Näherung in 1. Ordnung.

## Aufgabe 24: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass es in einem idealen Bosegas in zwei Dimensionen keine Bose-Einstein-Kondensation gibt. Werten Sie dazu den Zusammenhang zwischen der Teilchenzahl $N = \sum_i N_i$ und dem chemischen Potenzial $\mu$ aus und diskutieren Sie das Ergebnis für $\mu \to 0$.

Tipp: Die geometrische Reihe könnte Ihnen hier hilfreich sein.