Übung zur Theoretischen Physik IV

SS 2014

Ausgabe: 2. Juni 2014, Abgabe: 23. Juni 2014, 12 h
Besprechung in den Übungsgruppen am 26./27. Juni 2014

5. Übungsblatt

Aufgabe 16: (7 Punkte)

Betrachten Sie ein isoliertes System bestehend aus $N \gg 1$ unterscheidbaren identischen Teilchen, die jeweils nur einen von zwei Energiezuständen, $E_0 = 0$ und $E_1 = \epsilon$, besetzen können.

a) Zeigen Sie für $n \gg 1$ die Gültigkeit der Formel $\ln(n!) \approx n \ln(n) - n$.

b) Bestimmen Sie die Entropie $S(U)$ als Funktion der inneren Energie $U = n\epsilon$, wobei n die Zahl der Teilchen im Zustand mit Energie ϵ bezeichnet. Nehmen Sie dazu an, dass sich jeweils sehr viele Teilchen in beiden Energiezuständen befinden, also $n \gg 1$ und $N - n \gg 1$.

c) Berechnen Sie die Temperatur $T(U)$ als Funktion der inneren Energie U und diskutieren Sie ihren Verlauf. Welchen Wert nimmt die Temperatur bei maximaler Entropie an? Welche Besonderheit zeigt sich bei hohen Energien?

d) Erklären Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse *qualitativ* den Verlauf von Temperatur und Entropie in Systemen mit endlich vielen Energieniveaus. Was passiert in Systemen ohne obere Beschränkung der Energiezustände (zum Beispiel in der realen Welt)?

e) Berechnen sie die Wärmekapazität $C_V(T)$ des Zwei-Niveau-Systems und untersuchen Sie den Grenzfall $T \to 0$.

Aufgabe 17: (6 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N unterscheidbaren harmonischen (Quanten-) Oszillatoren, deren Wechselwirkung untereinander vernachlässigt werden kann. Die möglichen Energiewerte des Systems sind durch $U(N, m) = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}N + m\right)$ mit $m = 0, 1, 2, ...$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass es $\binom{N+m-1}{m}$ unterschiedliche Realisierungsmöglichkeiten gibt, die m nicht unterscheidbaren Quanten auf die N harmonischen Oszillatoren zu verteilen.

b) Bestimmen Sie für den Fall $m \gg 1$ die Entropie $S(U, N)$, die Temperatur T sowie die Energie $U(T, N)$. Zeigen Sie, dass bei hohen Temperaturen $kT \gg \hbar\omega$ die Energie des Quantensystems $U(T, N)$ in die Energie des klassischen Systems $U_{klassisch} = NkT$ übergeht.

c) Berechnen Sie die Wärmekapazität $C_V(T)$ des Systems. Wie verhält sich $C_V(T)$ für $T \to 0$ und $T \to \infty$?

Aufgabe 18: (6 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass das Volumen einer Kugel mit dem Radius R in $3N$ Dimensionen gegeben ist durch

$$V_{3N}(R) = \frac{\pi^{3N/2}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!} R^{3N}$$

Verwenden Sie dazu die Beziehung

$$\int_0^\pi dx\ (\sin x)^n = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \qquad (*)$$

b) Beweisen Sie die obige Beziehung (∗) unter Verwendung von

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n/2} \frac{2j}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \sqrt{\pi} \prod_{j=1}^{(n+1)/2} \frac{2j-1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\pi} \prod_{j=1}^{n/2} \frac{2j-1}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \prod_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{2j}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe 19: (4 Punkte)

Gegeben sei das Potenzial

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq \sigma \\ -\epsilon\left(1 - \frac{r^3}{8\sigma^3}\right), & \sigma < r < 2\sigma \\ 0, & r \geq 2\sigma \end{cases}$$

Skizzieren Sie das Potenzial und führen Sie die Virialentwicklung von p bis zur 1. Ordnung in $1/(k_B T)$ durch. Bestimmen Sie damit die Parameter a und b der *Van-der-Waals*-Zustandsgleichung.

Aufgabe 20: (4 Punkte)

In der Vorlesung wurden die Fermi-Integrale

$$\begin{aligned} f_{5/2}(\sigma) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx\, x^2 \ln\left(1 + \sigma \mathrm{e}^{-x^2}\right) \\ f_{3/2}(\sigma) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx\, \frac{x^2}{1 + \sigma^{-1} \mathrm{e}^{x^2}} \end{aligned}$$

eingeführt.

a) Zeigen Sie, dass sich diese aus der allgemeinen Formulierung

$$F_j(\alpha) = \int_0^\infty du\, \frac{u^j}{\mathrm{e}^{\alpha+u} + 1}$$

mit $\alpha = -\ln(\sigma)$ ergeben.

b) Verwenden Sie das Sommerfeld-Lemma für eine reguläre Funktion $\Phi(u)$, die bei $u = 0$ verschwindet,

$$\int_0^\infty \frac{du}{\mathrm{e}^{\alpha+u} + 1} \frac{d\Phi(u)}{du} = \Phi(u_0) + 2\left[c_2 \left(\frac{d^2\Phi}{du^2}\right)_{u_0} + c_4 \left(\frac{d^4\Phi}{du^4}\right)_{u_0} + \ldots\right]$$

mit $u_0 = \ln\sigma$ und Konstanten $c_2 = \pi^2/12$ und $c_4 = 7\pi^4/720$. Berechnen Sie damit die asymptotischen Formen von $f_{5/2}$ und $f_{3/2}$ für den Grenzfall stark nichtrelativistischer Entartung ($\sigma \gg 1$).