Übung zur Theoretischen Physik IV

SS 2014

Ausgabe: 24. April 2014, Abgabe: 5. Mai 2014
Besprechung in den Übungsgruppen am 8./9. Mai 2014

1. Übungsblatt

Informationen zur benoteten Scheinvergabe:

1) Es wird eine Klausur am Ende des Sommersemesters 2014 geben, in der zum Erhalt eines benoteten Scheins mindestens 50 Prozent zu erreichen sind. Eine Nachholklausur wird im September 2014 angeboten werden.
2) Durch Lösen der Übungsaufgaben ist ein Erwerb von Bonuspunkten möglich, der mit bis zu 10 % der Klausurpunkte auf das Klausurergebnis angerechnet wird.
3) Die Übungsaufgaben können gemeinsam bearbeitet werden mit maximal drei Personen pro Aufgabenzettel.
4) Der Bonus wird nur nach 2-maligem Vorrechnen einer Aufgabe in den Übungsgruppen angerechnet.

% Übungspunkte mehr als	90	80	70	60	50	40	30	20	10	5
% Bonus	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Untersuchen Sie, ob δf ein totales Differential ist und geben Sie wenn möglich f an.
a) $\delta f = cos(x)sin(y)\mathrm{d}x - sin(x)cos(y)\mathrm{d}y$
b) $\delta f = sin(x)cos(y)\mathrm{d}x + cos(x)sin(y)\mathrm{d}y$
c) $\delta f = x^3y^2\mathrm{d}x - y^3x^2\mathrm{d}y$
d) Für die Fälle, in denen kein totales Differential vorliegt, bestimmen Sie einen möglichen integrierenden Faktor $\mu(x,y)$, so dass $\mathrm{d}\mu = \mu(x,y)\delta f$ ein totales Differential ist.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Die Jakobi-Determinante zweier Funktionen $f(z,v)$ und $g(z,v)$ ist gegeben durch:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,v)} := \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_v & \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_z \\ \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_v & \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_v \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_z - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_z \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_v$$

Überprüfen Sie die folgenden Eigenschaften dieser Determinante:

a) Durch die Vertauschung zweier Spalten ändert sich das Vorzeichen:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,v)} = -\frac{\partial(f,g)}{\partial(v,z)}$$

b) Wählt man $g(z,v) = g(v) = v$, so erhält man:

$$\frac{\partial(f,v)}{\partial(z,v)} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_v$$

c) Seien $z = z(x, y)$ und $v = v(x, y)$ zwei weitere Funktionen, so gilt die Kettenregel:

$$\frac{\partial(\tilde{f}, \tilde{g})}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, v)} \frac{\partial(z, v)}{\partial(x, y)},$$

wobei $\tilde{f}(x, y) = f(z(x, y), v(x, y))$ und $\tilde{g}(x, y) = g(z(x, y), v(x, y))$[1].
d) Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel den Zusammenhang:

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, v)} = \left(\frac{\partial(z, v)}{\partial(f, g)}\right)^{-1}$$

e) Kombinieren Sie Ihre vorherigen Ergebnisse, wählen Sie die Funktionen $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$, $v(x, y) = y$ und beweisen Sie die bekannte Beziehung:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Tipp: Starten Sie mit $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_v$, verwenden Sie b) und nutzen Sie geschickt die Kettenregel.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

In Aufgabe 2 haben Sie die Relation

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

bewiesen. Zeigen Sie beispielhaft die Gültigkeit dieser Aussage, indem Sie die Relation auf die zwei folgenden Zustandsgleichungen anwenden:

a) Ideales Gas:

$$pV = Nk_BT$$

b) Van-der-Waals Gas:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Dabei sind a und b Konstanten.
Tipp: Setzen Sie $x = p$, $y = V$ und $z = T$ an und verwenden Sie (falls nötig) weitere Relationen aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Begründen Sie unter Verwendung des Kapitels 1.5 des Skripts, wie der universelle Wirkungsgrad η_c von Carnot-Maschinen zur Definition einer absoluten, thermodynamischen Temperaturskala benutzt werden kann.

[1] Obwohl $\tilde{f}$ und f unterschiedliche mathematische Funktionen sind, ist es in der Physik üblich, auf eine Unterscheidung zu verzichten, da $\tilde{f}$ und f dieselbe physikalische Größe beschreiben. Im Folgenden identifizieren wir stets $f(x, y) = \tilde{f}(x, y)$.